

Exercice 2.2 : Matrice de passage

$$e_r = \cos\theta e_x + \sin\theta e_y \quad \text{et} \quad e_\theta = -\sin\theta e_x + \cos\theta e_y$$

On exprime la base cylindrique dans la base cartésienne, ce qui donne la matrice de passage définie par $X_{\text{cyl}} = P_\theta X_{\text{cart}}$ où X_{cart} et X_{cyl} sont les composantes d'un vecteur X .

$$\begin{pmatrix} e_r \\ e_\theta \\ e_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} e_x \\ e_y \\ e_z \end{pmatrix} \quad \text{d'où} \quad P_\theta = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

On remarque que les colonnes de P_θ sont les coordonnées de la base cartésienne dans la base cylindrique (et pas l'inverse !).

Inverser P_θ revient à changer θ en $-\theta$ (P_θ correspond aussi à la rotation d'angle $-\theta$ autour de z , son inverse correspond à la rotation d'angle θ autour de z).

$$\text{On obtient } P_\theta^{-1} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \quad \text{Ainsi } P^{-1} = P^t \quad \text{et} \quad X_{\text{cart}} = P_{-\theta} X_{\text{cyl}} \quad (\text{formule 2.17 du cours}).$$

Pour avoir les coordonnées X_{cyl} du vecteur X dans la base cylindrique connaissant $X_{\text{cart}} = (3, \sqrt{3}, 5)$, il faut faire l'opération suivante : $X_{\text{cyl}} = P_\theta X_{\text{cart}}$. On obtient alors $-3\sin\theta + \cos\theta\sqrt{3} = 0$ car la deuxième coordonnée en cylindrique est nulle par définition, l'angle étant dans la matrice elle-même. Ainsi, $\theta = \frac{\pi}{6}$ et on calcule alors r qui vaut $r = \sqrt{x^2 + y^2} = 2\sqrt{3}$ et $z = 5$.

$$\text{Le résultat est donc } X_{\text{cyl}} = \begin{pmatrix} 2\sqrt{3} \\ 0 \\ 5 \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \theta = \frac{\pi}{6}.$$

Le tenseur σ exprimée dans la base cylindrique définie par $\theta = \frac{\pi}{6}$ a pour composantes :

$$\sigma_{\text{cyl}} = P_\theta \sigma_{\text{cart}} P_\theta^t = P_\theta \sigma_{-\theta} = \begin{pmatrix} \cos\theta & \sin\theta & 0 \\ -\sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 10 & 5\sqrt{3} & 0 \\ 5\sqrt{3} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 15 & 0 & 0 \\ 0 & -5 & 0 \\ 0 & 0 & 10 \end{pmatrix}$$

Le tenseur σ est diagonale dans le repère (O, x, y, z) tourné de $\theta = \frac{\pi}{6}$ autour de e_z .

Exercice 2.3 : Moment d'inertie d'un disque de hauteur H

On place un repère cylindrique avec son origine au centre de la surface inférieure du disque et l'axe z selon l'axe de rotation du disque i.e. son axe de symétrie.

$$\mathbf{b} = \rho \int \mathbf{r} \times \mathbf{v} \, dV \quad \text{avec} \quad \mathbf{r} = r\mathbf{u}_r + z\mathbf{u}_z \quad \text{et} \quad \mathbf{v} = r\omega\mathbf{u}_\theta$$

$$\mathbf{b} = \rho\omega \int (r^2\mathbf{u}_z - zr\mathbf{u}_r) \, dV = \left(\rho\omega \int r^2 r \, dr \, d\theta \, dz \right) \mathbf{u}_z - \left(\rho\omega \int zr^2 \mathbf{u}_r \, dr \, d\theta \, dz \right)$$

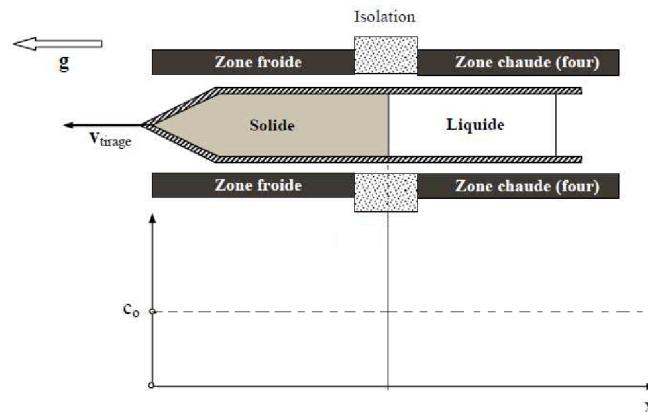
$$\rho\omega \int zr^2 \mathbf{u}_r \, dr \, d\theta \, dz = 0 \quad \text{car} \quad \mathbf{u}_r = \mathbf{u}_r(\cos\theta, \sin\theta, 0)$$

$$\mathbf{b} = \left(\rho\omega \int r^2 2\pi r \, dr \, dz \right) \mathbf{u}_z = J\omega\mathbf{u}_z \quad \text{avec} \quad J = \frac{2\pi\rho H R^4}{4} = \frac{MR^2}{2}$$

Si le disque est creux de rayon intérieur R_1 et de rayon extérieur R_2 , alors J vaut :

$$J = \frac{2\pi\rho H (R_2^4 - R_1^4)}{4} = \frac{M(R_2^2 + R_1^2)}{2}$$

Exercice 2.4 : Solidification dirigée dans un four à gradient (four Bridgman)



Représentation Lagrangienne:

Soit un point A (une particule de matière) situé dans le liquide et de composition c_0 au temps t_0 . En représentation Lagrangienne, on suit A au cours du temps. Puisque le monocristal est tiré vers la gauche à une vitesse v , A s'approche de l'interface à la vitesse v et voit sa composition augmenter jusqu'à une valeur c^* à l'interface. A la solidification, c chute à C_0 et reste à cette valeur ensuite.

Représentation Eulérienne:

On définit, pour cette représentation, une fenêtre d'observation fixe dans le repère lié au four et centrée sur l'interface (immobile) qui nous intéresse. On voit alors « s'écouler » tous les points qui passent de l'état liquide à l'état solide et on observe la variation de concentration autour du front de solidification plan positionnée en $x = 0$.

Pour ce genre de problème, la représentation Eulérienne est la plus adéquate puisqu'il s'agit d'un phénomène où seul ce qui se passe à l'interface nous intéresse, peu importe la position initiale des points dans le procédé.

On résout $D \frac{d^2 c_l}{dx^2} + v \frac{dc_l}{dx} = 0$ avec les deux conditions aux limites: $C_l = c_0/k$ en $x = 0$ et C_0 en l'infini.

Polynôme caractéristique : $Dr^2 + vr = 0$; les racines sont $r_1 = 0$ et $r_2 = -\frac{v}{D}$

On prend le repère eulérien tel que $x=0$ correspond à l'interface. D'où

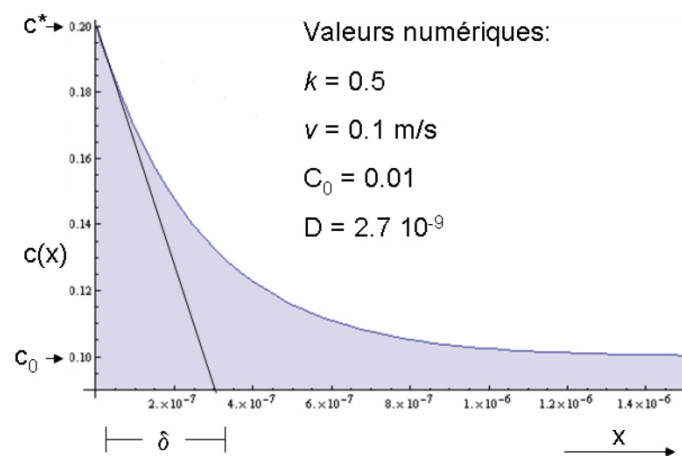
$$c_1(x) = A\exp(r_1x) + B\exp(r_2x) = A + B\exp\left(\frac{-vx}{D}\right)$$

Conditions aux limites : $c_1(x=0) = c_1^* = c_0/k$ et $c_1(x=\infty) = c_0$. D'où

$$c_1(x) = c_0 + (c_1^* - c_0)\exp\left(\frac{-vx}{D}\right) = c_0 + \frac{c_0}{k}(1-k)\exp\left(\frac{-x}{\delta}\right)$$

avec $\delta = D/V$, longueur de diffusion (rapport entre diffusion et transport).

La figure ci-dessous montre le profil de concentration aux alentours de l'interface pour un jeu de valeurs numériques. L'épaisseur de la couche limite est de l'ordre de $0.2 \mu\text{m}$.



Le passage de la représentation Eulérienne à la représentation Lagrangienne est effectué en exprimant la position en fonction du temps, $x = x_0 - v(t-t_0)$ (en gardant l'axe x orienté comme sur l'énoncé) avec x_0 représentant la position initiale de la particule suivie. L'équation décrivant la concentration devient alors une fonction du temps et de la position initiale :

$$c_1(x_0, t) = c_0 + \frac{c_0}{k}(1-k)\exp\left(\frac{-(x_0 - v(t-t_0))}{\delta}\right)$$

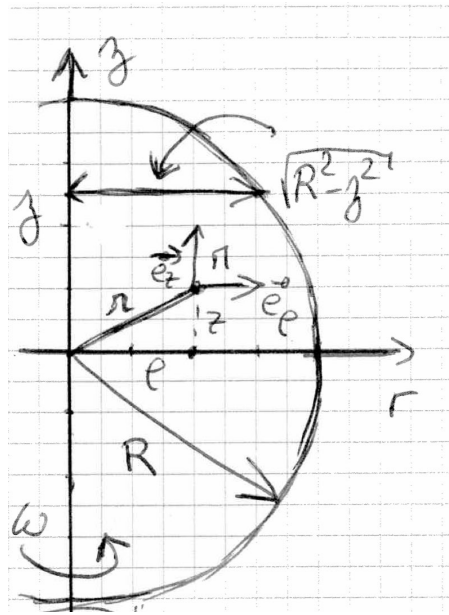
En suivant une particule de matière initialement située dans le domaine liquide, les variations de la concentration sont alors les suivantes :

La concentration augmente avec le temps, selon une loi exponentielle, jusqu'à la valeur $\frac{c_0}{k}$ à l'interface, $x=0$.

Une fois l'interface liquide/solide franchie, la concentration est constante et égale à c_0 .

NB : le coefficient de diffusion du soluté dans le solide est de l'ordre de $10^{-14} \text{ m}^2/\text{s}$ est 4 ordres de grandeur plus faible que le coefficient de diffusion du soluté dans le liquide de l'ordre de $10^{-10} \text{ m}^2/\text{s}$. Ainsi on néglige la diffusion du soluté dans le solide.

Exo 2.7: moment cinétique d'une sphère en rotation
En coordonnées cylindriques :



On pose γ = masse volumique pour ne pas confondre avec ρ

$$\vec{r} = \rho \vec{e}_\rho + z \vec{e}_z, \quad \vec{v} = \rho \omega \vec{e}_\theta, \quad \vec{r} \times \vec{v} = \rho^2 \omega \vec{e}_z - \rho z \omega \vec{e}_\rho$$

$$\vec{b} = \int_{\Omega} \gamma (\rho^2 \omega \vec{e}_z - \rho z \omega \vec{e}_\rho) dV \quad \text{avec } dV = \rho d\theta d\rho dz$$

$$\vec{b} = 2\pi\gamma\omega \int_{-R}^R \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho^3 d\rho \vec{e}_z dz - \gamma\omega \int_{-R}^R \int_0^{\sqrt{R^2-z^2}} \rho^2 z dz \left(\int_0^{2\pi} \vec{e}_\rho d\theta \right)$$

On remarque que $\int_0^{2\pi} \vec{e}_\rho \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} d\theta = \vec{0}$ ce qui annule le second terme.

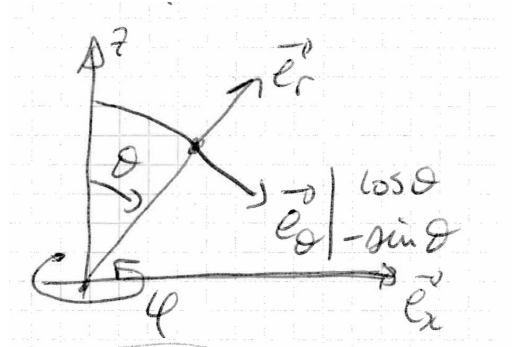
$$\vec{b} = 2\pi\gamma\omega \left(\int_{-R}^R \frac{(R^2-z^2)^2}{4} dz \right) \vec{e}_z = \frac{2\pi\gamma\omega}{4} \int_{-R}^R (R^4 - 2z^2 R^2 + z^4) dz \vec{e}_z$$

$$\vec{b} = \frac{\pi\gamma\omega}{2} \left(2R^5 - 4R^2 \frac{R^3}{3} + 2 \frac{R^5}{5} \right) \vec{e}_z = \pi\gamma\omega R^5 \left(1 - \frac{2}{3} + \frac{1}{5} \right) \vec{e}_z$$

$$\vec{b} = \frac{8\pi\gamma\omega R^5 \vec{e}_z}{15} \quad \text{or} \quad m = \frac{4}{3} \pi R^3 \gamma$$

$$\vec{b} = J \omega \vec{e}_z \quad \text{avec} \quad J = \frac{2}{5} m R^2$$

En coordonnées sphériques :



On pose γ = masse volumique pour ne pas confondre avec ρ

$$\vec{b} = \gamma \int \vec{r} \times \vec{v} dV, \quad \vec{r} = r\vec{e}_r \quad \text{et} \quad \vec{v} = \rho\omega\vec{e}_\phi = r\sin\theta\omega\vec{e}_\phi \quad \text{avec} \quad \rho = r\sin\theta$$

$$\vec{r} \times \vec{v} = r\vec{e}_r \times r\sin\theta\omega\vec{e}_\phi = -r^2\sin\theta\omega\vec{e}_\theta$$

$$\vec{b} = -\gamma\omega \int r^2\sin\theta\vec{e}_\theta dV \quad \text{avec} \quad dV = dr(r\sin\theta d\phi)(r d\theta) = r^2\sin\theta dr d\theta d\phi$$

$$\vec{b} = -\gamma\omega \int r^4 \sin^2\theta \vec{e}_\theta dr d\theta d\phi$$

$$\vec{b} \cdot \vec{e}_z = b_z = 2\pi\gamma\omega \int_0^\pi \int_0^R r^4 \sin^3\theta d\theta \quad \text{car} \quad \vec{e}_z \cdot \vec{e}_\theta = -\sin\theta$$

$$b_z = 2\pi\gamma\omega \int_0^\pi \frac{R^5}{5} \sin^3\theta d\theta = \frac{2\pi\gamma\omega R^5}{5} \int_0^\pi \sin^3\theta d\theta = \frac{2\pi\gamma\omega R^5}{5} \times \frac{4}{3} = \frac{2}{5} m R^2 \omega$$

$$b_x = b_y = 2\pi\gamma\omega \int_0^\pi \int_0^R r^4 \sin^2\theta \cos\theta dr d\theta = 2\pi\gamma\omega \frac{R^5}{5} \left[\frac{\sin^3\theta}{3} \right]_0^\pi = 0$$

$$\text{soit} \quad \vec{b} = J\omega\vec{e}_z \quad \text{avec} \quad J = \frac{2}{5} m R^2$$